جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

ماخ

دفترچه سؤالات و پاسخ تشریحی
مرحله اول
چهاردهمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر سال ۱۳۸۲

تعداد سوالات		مدت آزمون (دقیقه)
سوالات چند گزینه‌ای	مساله‌های تشریحی	
۴۰	-	۱۲۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۴۰ سؤال چند گزینه‌ای و ۲۰ مسأله‌ی تشریحی** و وقت آن **۲۴۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

۱- در استانی ۱۰ شهر و ۴۰ جاده بین تعدادی از شهرها وجود دارد (هر جاده دو شهر را به‌هم وصل می‌کند). یک شهر «مرکز» نامیده می‌شود اگر مستقیماً به همه‌ی شهرها وصل باشد در این استان حداکثر چند تا «مرکز» می‌توان داشت؟

الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ هـ) ۸

۲- در یک جدول نامتناهی دو نفر با نام‌های X و O با هم یک بازی X-O انجام می‌دهند. اول X بازی می‌کند. او یک x در یک خانه‌ی جدول می‌نویسد. سپس O یک o در یک خانه‌ی دلخواه دیگر می‌نویسد و این کار تکرار می‌شود. X برنده است اگر موفق شود ۳ تا x در یک ستون یا در یک سطر پشت سر هم ردیف کند. به همین ترتیب، O برنده است اگر ۳ تا o را بتواند در یک سطر یا در یک ستون پشت سر هم بنویسد. می‌دانیم که X می‌تواند طوری بازی کند که برنده شود. اگر O بهترین بازی خود را انجام دهد، X چند حرکت نیاز دارد تا حتماً برنده شود؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶ هـ) ۷

۳- برای کدام‌یک از مقادیر n می‌توان اعداد ۱ تا n را به دو دسته تقسیم کرد که مجموع اعداد هر دسته برابر باشد؟

الف) ۲۰۰۳ ب) ۲۰۰۲ ج) ۱۳۸۲ د) ۱۰ هـ) ۹

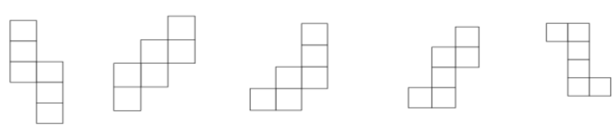
۴- یک گروه «انسان‌نما» شامل ۵ میمون است که بین هر دو میمون رابطه‌ی «دوستی» یا «دشمنی» برقرار است. این رابطه دوطرفه است، یعنی اگر a با b دوست (یا دشمن) باشد، b هم با a دوست (یا دشمن) است. هم‌چنین می‌دانیم که دوستِ دوست یک میمون و نیز دشمنِ دشمنِ او حتماً دوست اوست. چند گروه انسان‌نمای مختلف موجود است؟ توجه کنید که میمون‌های این گروه از هم متفاوت نیستند!

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ هـ) ۸

۵- ۱۰ نفر با نام‌های a_1 تا a_{10} داریم که هر کدام یا راست‌گوست و یا دروغ‌گو. راست‌گو همیشه راست و دروغ‌گو همیشه دروغ می‌گوید. به چند طریق می‌توان دروغ‌گو یا راست‌گو بودن a_1 تا a_{10} را تعیین کرد به‌طوری‌که هر نفر بتواند این جمله را بگوید که «از ۹ نفرِ دیگر، دقیقاً ۳ نفر راست‌گو و بقیه دروغ‌گو هستند.»؟

الف) ۱ ب) ۱۰ ج) ۱۲۰ د) ۱۲۱ هـ) ۲۱۱

۶- چه تعداد از این شکل‌ها را می‌توان با تا کردن از روی خطوط به یک مکعب واحد تبدیل کرد؟



الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ هـ) ۵

۷- اگر بتوانیم اعداد ۱، ۲، ...، و k را طوری با هم جمع و تفریق کنیم که حاصل بر ۱۱ بخش‌پذیر شود، می‌گوییم k عددی «خوب» است. برای مثال اعداد ۵ و ۳ هر دو عدد خوب هستند، زیرا ۰= ۳- ۲ + ۱ و ۱۱= ۵ + ۴+ ۳+ ۲ − ۱ . کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد اعداد خوب درست است؟

الف) همه‌ی اعداد فرد بزرگ‌تر از ۱۰ خوب هستند.
ب) همه‌ی اعداد خوب بزرگ‌تر از ۱۰ فرد هستند.
ج) همه‌ی اعداد زوج بزرگ‌تر از ۱۰ خوب هستند.
د) از هر ۵ عدد متوالی بزرگ‌تر از ۱۰ حداکثر ۳ تا خوب هستند.
هـ) گزینه‌های الف و ج هر دو صحیح هستند.

۸- ۲۰۰۴ خانه‌ی خالی با شماره‌های ۱ تا ۲۰۰۴ به ترتیب و در جهت ساعت‌گرد دور دایره‌ای قرار دارند. در خانه‌ی شماره‌ی ۱، یک مهره قرار می‌دهیم. امین و شایان شروع به بازی می‌کنند. در ابتدا امین مهره را یک خانه به جلو می‌برد و در خانه‌ی شماره‌ی ۲ قرار می‌دهد. از این به بعد، هر نفر در نوبت خود مهره را در جهت ساعت‌گرد تعدادی خانه به جلو می‌برد، به این ترتیب که اگر یک نفر در نوبت خود مهره را i خانه به جلو حرکت دهد، نفر بعد باید مهره را i یا $i+1$ خانه به جلو حرکت دهد. اگر کسی مهره را وارد خانه‌ی ۱۳۸۲اُم کند بازی را می‌برد. دقت کنید که ممکن است مهره از روی خانه‌ی ۱۳۸۲ بپرد (در این صورت بازی ادامه می‌یابد). کدام گزینه صحیح است؟

الف) شایان می‌تواند طوری بازی کند که ببرد. ب) امین می‌تواند طوری بازی کند که ببرد.

ج) امین می‌تواند طوری بازی کند که نبازد. د) شایان می‌تواند طوری بازی کند که نبازد.

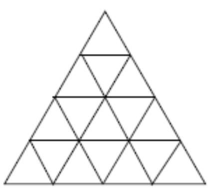
هـ) گزینه‌های ج و د صحیح‌اند.

۹- برای دو عدد صحیح a و b، مقدار $x = a \oplus b$ را به این صورت به دست می‌آوریم: ابتدا a و b را به مبنای ۲ می‌بریم و این دو عددِ دودویی را طوری زیرِ هم می‌نویسیم که ارقام هم‌ارزش آن‌ها زیر هم قرار گیرند. حال برای هر دو رقمی که زیرِ هم نوشته شده‌اند، اگر آن دو رقم برابر بودند زیرِ آن‌ها ۰ و اگر برابر نبودند زیرِ آن‌ها ۱ می‌نویسیم. به این ترتیب عددِ x (در مبنای ۲) در زیرِ دو عددِ a و b به دست می‌آید. اگر کمی دقت کنید متوجه می‌شوید که $a \oplus b = b \oplus a$ و نیز $a \oplus b \oplus c = (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$. مثلاً $\oplus$ بر روی اعداد ۲۵۶، ۲۴۰، ۲۰۴ و ۱۷۰ برابر ۴۰۶ است، چون $۱۱۰۰۱۰۱۱۰ = ۱۰۰۰۰۰۰۰۰ \oplus ۱۱۱۱۰۰۰۰ \oplus ۱۱۰۰۱۱۰۰ \oplus ۱۰۱۰۱۰۱۰$

مقدار $\oplus$ بر روی اعدادِ ۱۳۸۲، ۱۳۸۳، ...، ۲۰۰۳، ۲۰۰۴ کدام است؟

الف) ۳۱۱ ب) ۶۰۹ ج) ۱۰۲۴ د) ۱۳۸۱ هـ) ۲۰۰۵

۱۰- به چند طریق می‌توان در ۱۶ مثلث شکل روبرو، اعداد ۰ یا ۱ نوشت، به طوری که مجموع اعداد موجود در مثلث‌های مجاورِ هر مثلث، فرد شود، و به چند طریق می‌توان همین کار را کرد که مجموع اعداد موجود در مثلث‌های مجاورِ هر مثلث، زوج شود؟



(دو مثلث مجاورند اگر در یک ضلع مشترک باشند.) پاسخ‌های این دو سؤال به ترتیب کدامند؟

الف) ۱ و ۱۶ ب) ۱۶ و ۱ ج) ۱۶ و ۱۶

د) ۰ و ۱۶ هـ) ۰ و ۱۲۸

۱۱- هادی و کاوه مشغول بازی هستند. بازی به این صورت است که هر نفر در نوبت خود یکی از اعداد ۱ تا ۹ را که تاکنون نوشته نشده در یکی از خانه‌های خالی جدول می‌نویسد. این کار ادامه می‌یابد تا جدول پر شود. در انتها، ۴ عدد که حاصل‌ضرب‌های ۳ عدد سطرِ وسط، ۳ عدد ستونِ وسط و ۳ عددِ روی هر قطرِ مربع هستند را حساب می‌کنند و این ۴ حاصل‌ضرب را با هم جمع می‌کنند. کاوه می‌خواهد این مجموع را زیاد و هادی می‌خواهد این مجموع را کم کند. برای مثال این مجموع برای جدول روبرو برابر است با :

۳	۶	۱
۷	۹	۸
۲	۵	۴

$$(۸ \times ۹ \times ۷) + (۶ \times ۹ \times ۵) + (۱ \times ۹ \times ۲) + (۴ \times ۹ \times ۳) = ۵۰۴ + ۲۷۰ + ۱۸ + ۱۰۸ = ۹۰۰$$

فرض کنید هادی و کاوه هر دو به بهترین نحو ممکن بازی می‌کنند و کاوه شروع‌کننده‌ی بازی است. کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

الف) مجموع نهایی بین ۲۰۰ تا ۴۰۰ است. ب) مجموع نهایی بین ۴۰۱ تا ۶۰۰ است.

ج) مجموع نهایی بین ۶۰۱ تا ۸۰۰ است. د) مجموع نهایی بزرگ‌تر از ۸۰۰ است.

هـ) اطلاعات برای تعیین محدوده‌ی مجموع نهایی کافی نیست.

۱۲- دو دنباله‌ی ۱۰ تایی A و B از ارقام ۰ و ۱ داده شده‌اند. در هر حرکت می‌توانیم وضعیت ارقام A را از سمت چپ تا جای دلخواهی عوض کنیم (یعنی هر رقم ۱ را به ۰ و هر رقم ۰ را به ۱ تبدیل کنیم.) اگر A =۱۰۱۱۱۰۰۱۰۰ و B =۰۰۱۱۰۱۰۰۱۰ باشد، حداقل چند حرکت لازم است تا A به B تبدیل شود؟

الف) ۵ ب) ۶ ج) ۱۰ د) ۱۱ هـ) نمی‌توان از A به B رسید.

۱۳- می‌خواهیم k اسب شطرنج با شماره‌های ۱ تا k را طوری در صفحه‌ی ۵ × ۵ قرار دهیم تا بتوان اسب‌ها را به ترتیب شماره‌هایشان یک بار حرکت داد به طوری که در هیچ زمانی در یک خانه دو اسب قرار نگیرد. یک حرکت اســب به صورت L یعنی حرکت به ۲ خانه‌ی عمودی (یا افقی) بعدی و سپس یک خانه در جهت افقی (یا عمودی) است. بیشینه‌ی مقدار k چند است؟

الف) ۱۲ ب) ۱۳ ج) ۲۰ د) ۲۲ ه) ۲۴

۱۴- به ازای کدام یک از مقادیر n که در گزینه‌ها آمده است، نمی‌توان اعداد ۱ تا n را در یک ردیف طوری قرار داد که: هر عدد دقیقاً یک بار آمده باشد، و اگر اختلاف هر دو عدد متوالی را بنویسیم تمام اعداد ۱ تا ۱- n نوشته شده باشند؟

الف) ۲۰ ب) ۳۲ ج) ۳۷

د) ۴۸ ه) به ازای همه‌ی مقادیر n این کار ممکن است.

۱۵- عدد یک جای گشت عبارت است از تعدادِ جفت عددهای متوالی که هر دو عدد آن فرد باشند منهای تعدادی جفت عددهای متوالی که هر دو عدد آن زوج باشند. برای مثال عدد جای گشت ۲۴۱۳۵۶ برابر ۱- ۲ =۱ است. بیشینه‌ی اعداد جای گشت‌های ۱ تا ۲۰ چیست؟

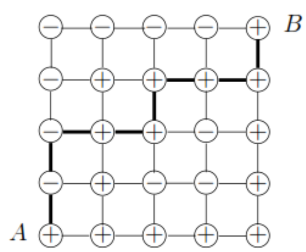
الف) ۰ ب) ۱ ج) ۹ د) ۱۰ ه) ۱۹

۱۶- فردی در نقطه‌ی (۲،۳) جدول مختصات قرار دارد. او در هر حرکت اگر در نقطه‌ی (i, j) باشد، می‌تواند به یکی از نقطه‌های $(i+i\times j, j)$، $(i-i\times j, j)$، $(i, j-i\times j)$، یا $(i, j+i\times j)$ برود. با تکرار این حرکت‌هـا، این فرد به کــدام یک از نقطه‌هـای زیر می‌تواند برسد؟

الف) (-۲۵۶، ۹۰۰۲) ب) (۱۵۳۵، -۲۵۳۰۱) ج) (-۱۸، ۱۵۴۰۰)

د) (۳۲، -۹۲۰۷) ه) (-۱۷۰۱ ، ۲۵۶)

۱۷- در شکل مقابل، چند مسیر مختلف به طول ۸ از A به B داریم که تعداد زوجی علامت - داشته باشد؟ یکی از مسیرها در شکل نشان داده شده است.



الف) ۱۶ ب) ۳۲ ج) ۳۳ د) ۳۵ ه) ۶۴

۱۸- ۵۰ سکه‌ی ۱ تومانی و یک دستگاه داریم. هر بار می‌توان دو سکه‌ی a و b تومانی وارد دستگاه کرد و یک سکه‌ی a+b تومانی دریافت نمود. می‌دانیم که برای هر عدد طبیعی سکه وجود دارد. حداقل چند بار از این دستگاه استفاده کنیم تا ۵۰ سکه‌ی ۱ تومانی اولیه به یک سکه‌ی ۵۰ تومانی تبدیل شود؟

الف) ۴۵ ب) ۴۶ ج) ۴۷ د) ۴۸ ه) ۴۹

۱۹- همان سؤال قبلی را با این فرض که در ابتدا ۴۰ سکه‌ی ۱ تومانی در اختیار داریم در نظر بگیرید. برای تبدیل این سکه‌ها به یک سکه‌ی ۴۰ تومانی حداقل چند نوع سکه‌ی مختلف تولید می‌شــود؟ برای مثـال، برای تولید یک سکه‌ی ۸ تومانی ۴ نوع سکـه‌ی مختلفِ ۱، ۲، ۴ و ۸ تومانی تولید می‌شود.

الف) ۷ ب) ۸ ج) ۹ د) ۱۰ ه) ۱۱

۲۰- ۱۳۸۲ وزنه‌ی یک شکل و با وزن‌های متمایز داریم که وزن هر کدام توانی از ۲ است. یک ترازوی دو کفه‌ای در اختیار داریم. در هر بار «توزین» می‌توانیم تعدادی از وزنه‌ها را در یک کفه و بقیه‌ی وزنه‌ها را در کفه‌ی دیگر قرار دهیم (همه‌ی وزنه‌ها باید در دو کفه‌ی ترازو قرار گیرند) و مجموع وزن وزنه‌های موجود در دو کفه را با هم مقایسه کرد. با حداقل چند بار توزین می‌توان سنگین‌ترین وزنه را پیدا کرد؟

الف) ۱۱ ب) ۲۲ ج) ۶۹۱ د) ۱۳۸۱ ه) این کار ممکن نیست.

۲۱- در سؤال قبل، سبک‌ترین وزنه را حداقل با چند بار توزین می‌توان پیدا کرد؟

الف) ۱۱ ب) ۲۲ ج) ۶۹۱ د) ۱۳۸۱ ه) این کار ممکن نیست.

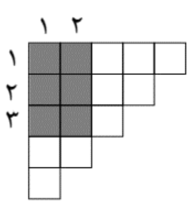
۲۲- جدول مختصات را در نظر بگیرید. در ثانیه‌ی صفر همه‌ی نقطه‌های آن سفیدند به غیر از نقطه‌ی (۰ ، ۱) که سیاه است. می‌دانیم که اگر در ثانیه‌ی t نقطه‌ی (i, j) سیاه و اختلافِ i و j برابر k باشد، در ثانیه‌ی t + ۱ علاوه‌بر نقطه‌ی (i, j)، نقطه‌های $(i+k, j)$، $(i-k, j)$، $(i, j+k)$، $(i, j-k)$ نیز سیاه خواهند شد. در پایانِ ثانیه‌ی ۶ چند خانه‌ی سیاه در جدول موجود است؟

الف) ۱۳۹ ب) ۱۵۶ ج) ۱۹۱ د) ۲۵۳ ه) ۵۴۶۱

۲۳- یک جدول ۵ × ۵ داریم که آن را به صورت شطرنجی سیاه و سفید کرده‌ایم به طوری که گوشه‌های جدول سیاه‌اند. در ابتدا در خانه‌ی سطر ۱ و ستون ۱ (خانه‌ی بالا و سمت چپ) قرار داریم. در هر مرحله اگر در خانه‌ی سیاه هستیم یک خانه به پایین و اگر در خانه‌ی سفید هستیم، یک خانه به راست می‌رویم. دقت کنید که اگر به انتهای سطر یا ستون برسیم از طرف دیگر وارد می‌شویم. بعد از ۱۳۸۲ مرحله در کدام خانه هستیم؟

الف) سطر ۱ و ستون ۱ ب) سطر ۲ و ستون ۲ ج) سطر ۱ و ستون ۵
د) سطر ۵ و ستون ۴ ه) سطر ۴ و ستون ۵

۲۴- پشت هر یک از خانه‌های جدول روبرو یک عدد نوشته شده است. این اعداد دیده نمی‌شوند. می‌خواهیم با کمترین تعداد پرسش مجموع همه‌ی اعداد این جدول را بیابیم. در هر پرسش یک خانه‌ی x را مشخص می‌کنیم. در پاسخ، مجموع اعداد موجود در مستطیلی که خانه‌ی (۱ ،۱)، گوشه‌ی بالا و سمت چپ و خانه‌ی x گوشه‌ی پایین و سمت راست آن است گزارش می‌شود. مثلاً مستطیل مربوط به خانه‌ی (۲ ،۳) در شکل مقابل نشان داده شده است. کمینه‌ی تعداد پرسش‌های لازم چند تاست؟



الف) ۵ ب) ۹ ج) ۱۰ د) ۱۴ ه) ۱۵

۲۵- می‌دانیم که عدد n ام فیبوناچی، یا F_n به این صورت تعریف می‌شود: $F_0 = 0$ ، $F_1 = 1$ ، $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ برای $n \geq 2$. برای چه تعداد $0 \leq n \leq 100$ عدد F_n بر ۱۳ بخش پذیر است؟

الف) ۹ ب) ۱۱ ج) ۱۳ د) ۱۵ ه) ۱۷

۲۶- در یک کشور با واحد پول «تورو» دو نوع سکه‌ی پول خرد وجود دارد: ۱ تورویی و x تورویی. مقدار x چقدر باشد تا اگر همه‌ی مبالغ ۱ تورو تا ۱۰۲۴ تورو را به سکه‌های پول خرد تبدیل کنیم، مجموع تعداد سکه‌های حاصل کمینه شود؟ فرض می‌کنیم که در هر خرد کردن کمترین تعداد سکه را به دست می‌آوریم.

الف) ۲ ب) ۱۰ ج) ۳۲ د) ۱۲۸ ه) ۵۱۲

۲۷- فرض کنید که $p(i)$ حاصل‌ضرب ارقام غیر صفر عدد صحیح دهدهی i است. مثلاً، $p(۲۰۵) = ۱۰$، مقدار $p(۱) + p(۲) + \ldots + p(۹۹۸) + p(۹۹۹)$ چقدر است؟

الف) $۴۵^۳ - ۱$ ب) $۴۵^۳ - ۴۵^۲$ ج) ۴۵×۴۶^۲ د) $۴۶^۳-۱$ ه) ۴۶×۴۵^۲

۲۸- ۸۲ کارت به ترتیب بر روی هم قرار دارند. بر روی این کارت‌ها اعداد دلخواه ولی متمایزی نوشته شده‌اند. یک نفر دنباله‌ای از دستورهای (i, j) را به ترتیب بر روی این کارت‌ها اجرا می‌کند. دستور (i, j) یعنی اینکه اگر عدد نوشته شـــده بر روی کارت i ام (از بالا) از عدد نوشتـــه شده بر روی کارت i ام بیشتر باشد، این دو کارت جا به جا شوند.

توجه کنید که این کار تغییری در ترتیب کارت‌های دیگر ایجاد نمی‌کند. دستورهای مقابل را یک بار از ابتدا تا انتها به ترتیب بر روی کارت‌های ورودی اجرا کنیم. کدام یک از گزینه‌های زیر بهترین جواب برای وضعیت نهایی کارت‌هاست؟

(۱,۲)
(۲,۳)
(۱,۲)
(۳,۴)
(۲,۳)
(۴,۵)
(۳,۴)
(۵,۶)
(۴,۵)
⋮
(۸۰,۸۱)
(۷۹,۸۰)
(۸۱,۸۲)
(۸۰,۸۱)

الف) کارت‌ها برحسب عددشان از بالا به پایین به صورت صعودی مرتب می‌شوند.

ب) کارت با بزرگ‌ترین عدد، پایین‌ترین کارت خواهد شد.

ج) کارت با بزرگ‌ترین عدد در پایین و کارت با دومین بزرگ‌ترین عدد درست بالای آن خواهد بود.

د) کارت با کوچک‌ترین عدد اولین کارت خواهد شد.

ه) کارت با کوچک‌ترین عدد اولین کارت و کارت با دومین کوچک‌ترین عدد کارت دوم خواهد بود.

۲۹- سه دسته کارت به ترتیب با a، b و c عدد کارت یک شکل داده شده‌اند. این وضعیت را با (a, b, c) نمایش می‌دهیم. هر بار می‌توانیم سه عدد کارت از یک دسته برداریم، یکی از آن‌ها را دور بریزیم و از دو تای دیگر یک کارت به هر کدام از دو دسته‌ی دیگر اضافه کنیم. این کار را تا وقتی که ممکن است تکرار می‌کنیم. مثلاً از ترکیب $(۳,۱,۴)$ می‌توانیم به صورت زیر به $(۰,۲,۱)$ برسیم.

$$(۳,۱,۴) \Rightarrow (۰,۲,۵) \Rightarrow (۱,۳,۲) \Rightarrow (۲,۰,۳) \Rightarrow (۳,۱,۰) \Rightarrow (۰,۲,۱)$$

اگر از $(۵,۵,۶)$ شروع کنیم، کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند ترکیب نهایی باشد؟

الف) $(۰,۰,۰)$ ب) $(۲,۱,۰)$ ج) $(۲,۲,۰)$ د) $(۱,۱,۲)$ ه) $(۱,۱,۰)$

۳۰- می‌دانیم که با ۸ رقم دودویی می‌توان اعداد ۰ تا ۲۵۵ را نمایش داد. یعنی اگر عدد دودویی $(a_۷a_۶a_۵a_۴a_۳a_۲a_۱a_۰)_۲$ باشد مقدار آن برابر $۱۲۸a_۷ + ۶۴a_۶ + ۳۲a_۵ + ۱۶a_۴ + ۸a_۳ + ۴a_۲ + ۲a_۱ + a_۰$ است. یعنی اگر رقم $a_۴$ (یعنی رقم با ارزش $۲^۴$) به جـای ۰ و ۱، دو مقـدار ۱- و ۱ را اختیار کند، تعداد کل اعداد متمایز قابل نمایش با این ۸ رقم دودوئی چند تا است؟

الف) ۱۲۸ ب) ۱۴۴ ج) ۱۹۶ د) ۲۵۶ ه) ۲۷۲

۳۱- به چند حالت می‌توان یک جدول ۳ × ۳ را با اعداد ۰ و ۱ پر کرد که تعداد ۱ های موجود در همسایه‌های هر خانه، فرد باشد. دو خانه همسایه‌ی یکدیگرند اگر در یک ضلع یا یک گوشه مشترک باشند. پس تعـداد همسـایـه‌ها حداقل ۳ و حداکثـر ۸ تاست. هیـچ خانـه‌ای همسایه‌ی خودش محسوب نمی‌شود.

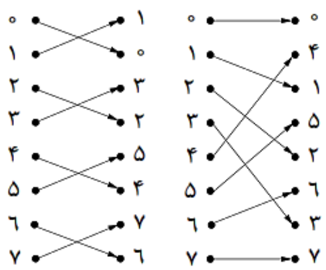
الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۸ ه) ۳۲

۳۲- از هر نفر در یک گروه ۱۶ نفره می‌پرسیم که چند نفر دیگر در گروه وجود دارند که هم قد او هستند. ۱۵ تا از جواب‌ها این چنین‌اند: ۶ تا جواب ۱، ۶ تا جواب ۲، ۳ تا جواب ۳. با فرض آن که همه راست می‌گویند، جواب نفر ۱۶ ام چیست؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳

د) ۴ ه) چنین جواب‌هایی ممکن نیست.

-۳۳ ۸ کارت بر روی هم قرار دارند. بر روی این کارت‌ها اعداد ۰ تا ۷ به ترتیب از بالا به پایین نوشته شده است (کارت ۰ روست). دو نوع بُر زدن داریم که در شکل مقابل آمده است. یکی «تعویض» که کارت‌ها را از رو دو به دو با هم تعویض می‌کند. دیگری «بُر کامل» است کـه کارت را از رو به دو دسته‌ی چهار کارتی تقسیم می‌کند و به صورت کامل دو دسته را با هم بُر می‌زند تا یک دسته کارت ۸ تایی به دست آید. ترتیب قرار گرفتن کارت‌ها پس از یک بُر کامل و نیز یک تعویض در شکل نشان داده شده است. می‌خواهیم با حداقل تعداد بُر زدن‌ها (عددِ B) کاری کنیم که در نهایت کارت با یک عدد دلخواه به روی دسته کارت بیاید. بیشترین مقدار B چقدر است؟



بر کامل — تعویض

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶ ه) ۷

-۳۴ یک شمارنده‌ی دودویی سه رقمی به طور معمول اعداد صفر ۲(۰۰۰) تا هفت ۲(۱۱۱) را می‌شمارد. اگر عدد دودویی شمارنده $(a_۲\, a_۱\, a_۰)_۲$ باشد، عددی که نشان می‌دهد برابر $۴a_۲ + ۲a_۱ + a_۰$ است. فرض کنید یکی از رقم‌های این شمارنده خراب شـده است و به جـای ۰ و ۱، دو مقدار دیگر (مثلاً ۰ و ۲، ۱ و ۳، ۲ و ۳ یا مقادیر دیگر) را اختیار می‌کند. در نتیجه شمارنده به جای اعداد ۰ تا ۷، به ترتیب اعداد ۲، ۳، ۶، ۷، ۶، ۷، ۱۰ و ۱۱ را نمایش می‌دهد. رقم خراب، و دو مقداری که اختیار می‌کند کدام است؟

الف) رقم $a_۱$ و مقادیر ۱ و ۲ ب) رقم $a_۱$ و مقادیر ۱ و ۳ ج) رقم $a_۰$ و مقادیر ۲ و ۳

د) رقم $a_۰$ و مقادیر ۲ و ۴ ه) رقم $a_۲$ و مقادیر ۱ و ۲

-۳۵ عدد صحیح N و یک چراغ روشن مفروض است. دستورالعمل زیر را به ترتیب یک بار برای N = ۱۳۸۲ و یک بار دیگر برای N = ۲۰۰۴ اجرا کنید و معین کنید که به ترتیب چند بار در بار اول اجرا (N = ۱۳۸۲) و چند بار در بـار دوم اجـرا (N = ۲۰۰۴)، هوپ می‌گوئید. مثلاً اگر دستورالعمل را به ترتیب برای N = ۳، و N = ۵، اجرا کنید، جواب سؤال ۱ و ۰ (یک هوپ برای N = ۳، و صفر هوپ برای N = ۵) خواهد بود.

دستورالعمل:

چراغ را خاموش کن.

اگر N = ۰ است، برو به ۷ وگرنه برو به ۳.

N را بر ۲ تقسیم کن. خارج قسمت آن را N و باقی‌مانده را R نام ده. برو به ۴.

اگر R = ۱ است برو به ۵ وگرنه برو به ۶.

اگر چراغ خاموش است آن را روشن کن، وگرنه بگو «هوپ». در هر صورت برو به ۲.

اگر چراغ روشن است آن را خاموش کن و برو به ۲.

پایان دستورالعمل.

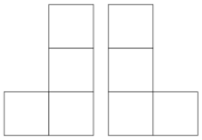
الف) ۲ و ۲ ب) ۲ و ۴ ج) ۶ و ۷ د) ۴ و ۳ ه) ۴ و ۵

-۳۶ دو دنباله‌ی $A = ۱, ۱۰۱, ۱۱$ و $B = ۱۱۱, ۱۰, ۰$، هر یک شامل ۳ رشته از ۰ و ۱ داده شده‌اند. با داشتن دنباله‌ی دلخواه $c = c_۱, c_۲, \ldots, c_n$ (به‌طوری‌که $c_i \in ۱, ۲, ۳$، برای هـر $۱ \le i \le n$)، دو رشته‌ی a و b را به ترتیب از اعضـای A و B به شـرح زیر می‌سازیم: فرض کنید منظور از A_i و B_i به ترتیب عضو i امِ A و عضو i امِ B باشد، آن‌گاه $a = A_{c_۱} A_{c_۲} \ldots A_{c_n}$ و $b = B_{c_۱} B_{c_۲} \ldots B_{c_n}$. مثلاً اگر $c = ۱, ۱, ۲$ باشد، $a = A_۱ A_۱ A_۲ = ۱۱۱۰۱۱۱$ و $b = B_۱ B_۱ B_۲ = ۱۱۱۱۱۱۱۰$.

طول کوتاه‌ترین دنباله از اعداد ۱، ۲، و ۳ را بیابید به طوری که a = b .

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۵ ه) ۶

۳۷- می‌خواهیم خانه‌های یک جدول ۳ × ۳ را با علامت‌های + و − پر کنیم به طوری که تعداد علامت‌های + در هر چهارخانه‌ای که تشکیل یک شکل L- مانند دهد، زوج باشد. شکل L- مانند شکل‌های مقابل و یا شکلی است که از دوران آن‌ها به‌دست می‌آید. به چند روش می‌توان این کار را انجام داد؟

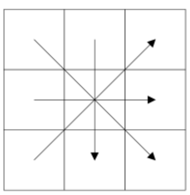


الف) ۴ ب) ۶ ج) ۸ د) ۱۲ هـ) ۱۶

۳۸- دو سینی داریم که در یکی از آن‌ها ۱۰ بشقاب روی هم چیده شده و سینی دیگر خالی است. هر بشقاب، یکی از ۵ رنگ را دارد و هر رنگ دقیقاً ۲ بار آمده است. در یک حرکت، می‌توان هر کدام از بشقاب‌های سینی اول را برداشت و روی بشقاب‌های موجود در سینی دوم گذاشت. توجه شود که این بشقاب را فقط روی بشقاب‌های سینی دوم می‌توان قرار داد، و نمی‌توانیم زیر بشقاب دیگری قرار دهیم.
هدف این است که بعد از ۵ حرکت، رنگ بشقاب‌های دو سینی به ترتیب از پایین به بالا دقیقاً یکسان شود. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

الف) ۳۲ ب) ۶۴ ج) ۱۲۰ د) ۲۵۲ هـ) بستگی به وضعیت ابتدایی دارد.

۳۹- یک جدول ۳ × ۳ از اعداد ۱ تا ۵ موجود است. اگر ارقام موجود در هر یک از سطرها را از چپ به راست، ارقام هر یک از ستون‌ها را از بالا به پایین، و نیز ارقام دو قطر را به صورت شکل مقابل کنار هم بنویسیم، ۸ عدد سه رقمی به دست خواهد آمد. اگر ۱۱۲، ۱۲۱، ۱۲۳، ۱۵۳، ۲۴۳، ۳۱۳، و ۳۲۲، ۷ تا از این اعداد باشند، عدد هشتم کدام است؟



الف) ۵۲۴ ب) ۴۲۵ ج) ۲۵۴ د) ۵۱۴ هـ) ۴۱۵

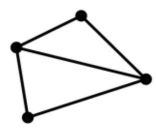
۴۰- یک عدد، «آینه‌ای» است اگر از هر دو طرف راست و چپ یک مقدار خوانده شود؛ مثلاً اعداد ۱۲۲۱ و ۵۹۵ آینه‌ای هستند ولی ۱۰۱۰ نیست.
یک ساعت دیجیتال زمان را با یک عدد شش رقمی hhmmss نشان می‌دهد که hh نشان‌دهنده‌ی ساعت (از ۰۰ تا ۲۳)، mm و ss نشان‌دهنده‌ی دقیقه و ثانیه (از ۰۰ تا ۵۹) هستند. ساعت در ابتدای هر شبانه‌روز ۰۰۰۰۰۰ و در آخرین ثانیه‌ی آن ۲۳۵۹۵۹ است. عدد نشان داده شده در یک ساعت دیجیتال چند بار در یک شبانه‌روز آینه‌ای می‌شود؟

الف) ۳۶ ب) ۹۶ ج) ۱۴۴ د) ۲۴۰ هـ) ۱۰۰۰

«پاسخنامه تشریحی»

۱- شبکه کامل شبکه‌ای است که در آن هر شهر به تمام شهرهای دیگر وصل باشد. در چنین شبکه‌ای ۴۵ جاده وجود دارد چون از هر شهر ۹ جاده خارج می شود که مجموع کل جاده های خارج شده از ۱۰ شهر ۱۰×۹ یعنی ۹۰ می‌شود و چون هر جاده برای دو شهر شمارش شده است تعداد واقعی جاده ها برابر $\frac{۹۰}{۲}$ یعنی ۴۵ می شود (به طریق دیگر چون در شبکه کامل بین هر دو شهری جاده وجود دارد بنابراین به ازای انتخاب هر دو شهر متمایز یک جاده معرفی خواهد شد، به این معنا که تعداد جاده ها برابر $\begin{bmatrix} ۱۰ \\ ۲ \end{bmatrix}$ یعنی ۴۵ می باشد).

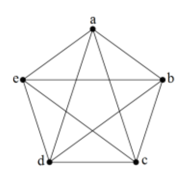
چون در استان داده شده ۴۰ جاده وجود دارد، بنابراین می‌توان تصور کرد که شبکه مورد نظر شبکه‌ای است که از شبکه کامل ۵ جاده برداشته شده باشد. باید آن ۵ جاده را چنان برداریم که تعداد شهرهای با ۹ جاده، ماکزیمم باشد. اگر آن ۵ جاده را به صورت مقابل از شبکه برداریم تعداد ۶ شهر به صورت مرکز باقی می ماند.



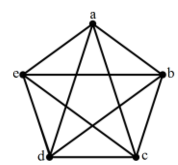
۲- بعد از حرکات اول X و O سطر و یا ستونی که در آن x قرار داشته و o قرار ندارد توسط X انتخاب شده و در کنار x قبلی یک x قرار می دهد. بعد از قرار داده شدن o در یکی از دو طرف x ها توسط O ، X در حرکت سوم خود x را در طرف دیگر x های قبلی قرار داده و برنده می شود.

۳- شرط لازم آن است که مجموعه اعداد از ۱ تا n یعنی $\frac{n(n+۱)}{۲}$ زوج باشد، به عبارت دیگر $n(n+۱)$ مضرب ۴ باشد و آن موقعی است که یکی از دو عدد n و $n+۱$ مضرب ۴ باشد. در بین گزینه‌ها فقط به ازای n=۲۰۰۳ حاصل $n(n+۱)$ مضرب ۴ می‌شود.

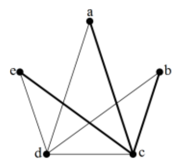
۴- دوستی بین دو میمون را با خط پر رنگ و دشمنی بین آنها را با خط کم رنگ نشان می‌دهیم که به شکل مقابل خواهیم رسید، با این توضیح که قرار است تعدادی از ۱۰ خط کشیده شده پر رنگ و مابقی کم رنگ می‌شوند و در ضمن نمی‌توان در آن شکل مثلث هایی به شکل یا ترسیم کرد.

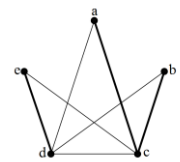


I) اگر هر پنج ضلع پنج ضلعی پر رنگ باشند، آنگاه تمام قطرهای آن پنج ضلعی نیز پر رنگ خواهد شد و به شکل مقابل خواهیم رسید:

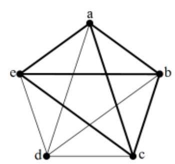


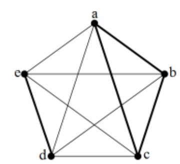
II) اگر ضلعی مانند cd از پنج ضلعی کم رنگ باشد آنگاه دقیقاً یکی از دو ضلع bc و bd و نیز دقیقاً یکی از دو ضلع ac و ad و همچنین دقیقاً یکی از دو ضلع ec و ed کم رنگ خواهند بود. اگر سه ضلع کمرنگ همگی متصل به یک رأس (مانند d) متصل باشند و یا دو تا از آن‌ها به یک رأس و سومی به رأس دیگر وصل باشند به ترتیب به دو شکل «۱» و «۲» خواهیم رسید:

(۱) 

 (۲)

بقیه پاره خط‌های مربوط به اشکال فوق به صورت منحصر به فرد، به شکل زیر معلوم می‌شوند:

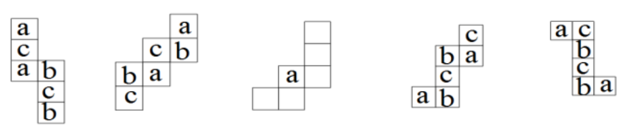
(۱) 

 (۲)

۵- معلوم است که اگر همه ۱۰ نفر دروغگو باشند، همه افراد می‌توانند جمله یاد شده را بیان کنند و نیز اگر ۴ نفر از آن ۱۰ نفر راستگو و ۶ نفر دیگر دروغ گو باشند، همه افراد می‌توانند جمله مورد نظر را بیان کنند.

تعداد طُرق اختصاص ۴ حرف «ر» و ۶ حرف «د» به دنباله از a_1 تا a_{10} برابر $\begin{bmatrix}10\\4\end{bmatrix}$ و نیز تعداد طُرق اختصاص ۱۰ حرف «د» به دنباله برابر $\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}$ می باشد، بنابراین جواب مورد نظر $\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}10\\4\end{bmatrix}$ یعنی ۲۲۱ می باشد.

۶- همه اشکال به غیر از وسطی، قابل تبدیل هستند. وجوه مقابل را با حروف یکسان نام گذاری می‌کنیم. در مورد اشاره برای وجهی که با a آسم گذاری شده است، وجه مقابلی یافت نمی‌شود.



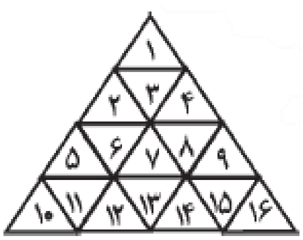
۷- مجموع اعداد از ۱ تا k را t نام گذاری می‌کنیم. بزرگترین عدد مضرب ۱۱ که کوچکتر یا مساوی t باشد را با t_1 و عدد مضرب ۱۱ ما قبل t_1 را t_2 می نامیم.

اگر $t-t_1$ زوج باشد آنگاه $\frac{t-t_1}{2}$ عددی صحیح بین ۰ تا ۵ خواهد بود که در این حالت با تبدیل علامت جمع به تفریق در پشت $\frac{t-t_1}{2}$ حاصل آن عبارت به جای t برابر t_1 خواهد شد که به ۱۱ بخش پذیر است، و اگر $t-t_1$ فرد باشد آنگاه $\frac{t-t_2}{2}$ عددی طبیعی بین ۶ تا ۱۰ خواهد شد که در این حالت نیز با تبدیل علامت جمع به تفریق در پشت عدد $\frac{t-t_2}{2}$ حاصل آن عبارت t_2 خواهد شد که باز مضرب ۱۱ است.

۸- فرض کنید بازیکنی در نوبت خود قادر باشد به تعداد k و یا k+۲ خانه حرکت کند. اگر با حرکت k خانه او، بازیکن دیگر بتواند برنده شود(معلوم است که در این حالت بازیکن دوم مهره را k و یا k+۱ خانه جابه‌جا کرده است)، آن‌گاه آن بازیکن به جای k خانه، k+۱ خانه مهره راجابه‌جا می‌کند و نمی‌گذارد بازیکن دوم برنده شود زیرا در این حالت بازیکن دوم مهره را k+۱ خانه و یا k+۲ خانه جابه‌جا می‌کند که در هر حال از خانه مورد نظر می‌گذرد و در آن خانه متوقف نمی‌شود. و در حالتی که با حرکت k+۱ خانه توسط بازیکن اول، بازیکن دوم بتواند برنده شود بازکن اول حرکت خود را به جای k+۱ حرکت به k حرکت تغییر می‌دهد.

۹- تبدیل یافته تمام اعداد از ۱۰۲۴ تا ۲۰۴۳ در مبنای ۲ عددی ۱۱ رقمی می‌شوند. بنابراین تبدیل یافته تمام اعداد داده شده در مبنای ۲ عددی ۱۱ رقمی می‌شود. از طرف دیگر معلوم می‌شود که رقم i ام عدد حاصل از عمل یاد شده برای اعداد داده شده برابر ۱ است اگر تعداد ۱های موجود در جایگاهi ام کل آن اعداد فرد باشد و در غیر این صورت رقم برابر ۰ است. تعداد اعداد داده شده برابر ۶۲۳ است که عددی فرد است، بنابراین در جایگاه یازدهم به تعداد ۶۲۳ رقم ۱ وجود دارد به این معنا که رقم یازدهم از عدد حاصل ۱ است و در نتیجه آن عدد بین ۱۰۲۴ و ۲۰۴۳ می‌باشد. رقم دهم از اعداد معادل اعداد ۱۰۲۴ تا ۱۵۳۵ در مبنای ۲ برابر ۰ و آن رقم در معادل‌های اعداد از ۱۵۳۶ تا ۲۰۴۳ برابر ۱ می‌باشد $\left(\frac{۱۰۲۴}{۲}+۱۰۲۳=۱۵۳۵\right)$، بنابراین رقم دهم از معادل‌های اعداد از ۱۳۸۲ تا ۱۵۳۵(که تعداد آن‌ها زوج است) برابر ۰ و آن رقم در معادل‌های اعداد از ۱۵۳۶ تا ۲۰۰۴(که تعداد آن‌ها فرد است) برابر ۱ می‌باشد و در نتیجه چون در تعداد فردی از ۶۲۳ عدد داده شده رقم دهم برابر ۱ باشد، بزرگ‌تر یا مساوی ۵۱۲ + ۱۰۲۴ می‌باشد که در بین گزینه‌ها فقط گزینه آخر در این محدوده می‌گنجد.

۱۰- مثلث‌ها را مطابق شکل از ۱ تا ۱۶ نام‌گذاری می‌کنیم. در حالت اول که می‌خواهیم مجموع اعداد موجود در مثلث‌های مجاور هر مثلثی فرد باشد، چون تن‌ها مثلث مجاور برای مثلث ۱ مثلث ۳ می‌باشد بنابراین علامت مثلث ۳ برابر «۱» می‌باشد. از طرف دیگر چون فقط دو خانه ۳ و ۶ مجاور خانه ۲ می‌باشد بنابراین علامت خانه ۶ برابر «۰» می‌شود. به همین ترتیب علامت خانه ۸ نیز «۰» می‌شود. علامت خانه ۱۳ برابر «۱» و علامت خانه‌های ۱۱ و ۱۵ برابر «۰» می‌شود که تناقض است.



در حالت دوم تمام مثلث‌های ۱۳،۱۱،۸،۶،۳ و ۱۵ علامت «۰» را به خود می‌پذیرند. هریک از دسته مثلث‌های سه‌گانه ۲،۱ و ۴ نیز دسته مثلث‌های سه گانه ۱۴،۹ و ۱۶ به‌طور مستقل از یک‌دیگر به چهار طریق «۰،۰،۰» یا «۱،۱،۰» یا «۰،۱،۱» و یا «۱،۰،۱» قابل علامت‌گذاری می‌باشند و بقیه مثلث‌ها وابسته به این‌ها به صورت منحصربه‌فرد پر می‌شوند، بنابراین طبق اصل ضرب جواب مورد نظر ۴×۴ می‌باشد.

۱۱- چون خانه وسط در تمام چهار پرانتز تکرار می‌شود پس برای بیشینه شدن آن حاصل، لازم است آن خانه با عدد ۹ پر شود. اگر ۸ عدد دیگر را به چهار دسته $\{۱،۲\}$، $\{۴،۳\}$، $\{۶،۵\}$ و $\{۸،۷\}$ تقسیم کنیم آنگاه کاوه می‌تواند درهر مرحله با توجه به عملکرد هادی، در خانه مقابل خانه‌ای که هادی عدد x را قرار داده است، هم دسته x را قرار دهد که در این صورت عدد به‌دست آمده برابر ۹۰۰ خواهد شد.

۱۲- اولین رقم از سمت راست A که با معادلش در B متفاوت باشد را i می‌نامیم. در هر مرحله، از اولین رقم از سمت چپ A شروع کرده و تا رقم i تمام ارقام را تعویض می‌کنیم که بعد از ۵ مرحله به شکل زیر به دنباله B خواهیم رسید.

$$A_{۰}=\underline{۱۰۱۱۱۰۰۱۰۰}\,۰ \rightarrow A_{۱}=\underline{۰۱۰۰۰۱۱}\,۰۱۰ \rightarrow A_{۲}=\underline{۱۰۱۱۱۰}\,۰۰۱۰ \rightarrow$$
$$A_{۳}=\underline{۰۱۰۰}\,۰۱۰۰۱۰ \rightarrow A_{۴}=\underline{۱}\,۰۱۱۰۱۰۰۱۰ \rightarrow A_{۵}=۰۰۱۱۰۱۰۰۰۱۰=B$$

۱۳- اگر اسب‌ها رامطابق شکل زیر از ۱ تا ۲۴ شماره‌گذاری کنیم، بیشینه مقدار k برابر ۲۴ به‌دست خواهد آمد:

۶	۱۱	۱۶	۲۱	۴
۱۷	۲۲	۵	۱۰	۱۵
۱۲	۷	۲۴	۳	۲۰
۲۳	۱۸	۱	۱۴	۹
	۱۳	۸	۱۹	۲

۱۴- اگر اعداد از ۱ تا n را به صورت زیر در یک ردیف بنویسیم همه اعداد از ۱ تا n-۱ تولید خواهند شد:

$$n, ۱, n-۱, ۲, n-۲, ۳, \ldots$$

۱۵- **راه حل اول** :در حالتی که اعداد از ۱ تا ۲۰ پشت سر هم نوشته شوند عدد جای‌گشت مورد نظر برابر ۰-۰ یعنی ۰ به دست می‌آید. اگر در همان حال فقط جای دو عدد ۱ و ۲ را با هم عوض کنیم تا به جای‌گشت ۲۱۳۴۵۶...۱۹۲۰ برسیم عدد مورد نظر برابر ۰-۱ یعنی ۱ خواهد شد. از این‌جا به بعد به ازای هر دو عدد فردی که بخواهند در کنار هم قرار بگیرند لاجرم دو عدد زوج نیز پیش هم قرار خواهند گرفت و بنابراین عدد مورد نظر برابر $(x+۱)-x$ یعنی ۱ خواهد شد.

راه حل دوم :دسته‌ای از اعداد فرد که در کنار هم هستند را O و دسته‌ای از اعداد زوج که در کنار هم هستند را E می‌نامیم. معلوم است که اگر در دسته‌ای m عددد موجود باشد، m-۱ جفت عدد با زوجیت یکسان در کنار هم قرار گرفته‌اند. جای‌گشت مورد نظر به یکی از چهار شکل زیر می‌باشد:

$I) E_۱ O_۱ E_۲ O_۲ \ldots E_n O_n$

$II) E_۱ O_۱ E_۲ O_۲ \ldots E_n O_n E_{n+۱}$

$III) E_۱ O_۱ E_۲ O_۲ \ldots O_n E_n$

$IV) O_۱ E_۱ O_۲ E_۲ \ldots O_n E_n O_{n+۱}$

فرض کنید $|E_i|$ و $|O_i|$ به ترتیب نشانگر تعداد اعداد موجود در هر یک از دسته‌های E_i و O_i باشد، آن‌گاه اولاً معلوم است که $\sum|E_i|=\sum|O_i|=۱۰$ و ثانیاً تعداد جفت عددهای متوالی که هر دو عدد آن از نظر زوجیت یکسان باشد در هر یک از آن دو دسته به ترتیب برابر $|E_i|-۱$ و $|O_i|-۱$ خواهد شد، بنابراین در هر یک از چهار حالت اشاره شده عدد خواسته شده به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$I) x_۱ = (|O_۱|-۱)+(|O_۲|-۱)+\ldots+(|O_n|-۱)-[(|E_۱|-۱)+(|E_۲|-۱)+\ldots+(|E_n|-۱)]$$
$$= \sum|O_i| - \sum|E_i| = ۰$$

$$II) x_۲ = (|O_۱|-۱)+(|O_۲|-۱)+\ldots+(|O_n|-۱)-[(|E_۱|-۱)+(|E_۲|-۱)+\ldots+(|E_{n+۱}|-۱)]$$
$$= \sum|O_i| - \sum|E_i| - ۱ = -۱$$

$$III) x_۳ = x_۱ = ۰$$

$$IV) x_۴ = (|O_۱|-۱)+(|O_۲|-۱)+\ldots+(|O_{n+۱}|-۱)-[(|E_۱|-۱)+(|E_۲|-۱)+\ldots+(|E_n|-۱)]$$
$$= \sum|O_i| - \sum|E_i| + ۱ = ۱$$

در بین اعداد به‌دست آمده عدد ۱ از همه بیشتر است.

۱۶- چون یکی از مؤلفه‌های زوج مرتب داده شده، زوج است پس در هر مرحله به هر مؤلفه مقداری زوج اضافه و یا کم می‌شود که زوجیت عدد اولیه را تغییر نمی‌دهد، بنابراین جواب نهایی جوابی است که مؤلفه اولش زوج و مؤلفه دومش فرد باشد که در بین گزینه‌ها فقط گزینه «د» چنین ویژگی را دارد. البته این شرط، شرط لازم بوده و کافی نیست. در هر مرحله نقطه (m,n) به یکی از نقاط $(m(۱-n),n),(m(۱+n),n),(m,n(۱-m)),(m,n(۱+m))$ تبدیل می‌شود به این معنا که یکی از مؤلفه‌های ثابت مانده و مؤلفه دیگر در (۱ + مؤلفه ثابت) و یا (مؤلفه ثابت - ۱) ضرب می‌شود. اگر مؤلفه‌های اولیه غیر مساوی با ۱ باشند، قدر مطلق مؤلفه‌های نقاط بعدی از قدر مطلق نقاط قبلی بیش‌تر می‌شود. بنابراین نقطه اولیه متناظر به زوج مرتب موجود در گزینه «د» به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$(۳۲,-۹۲۰۷)=(۳۲,-۳۱\times ۳۳\times ۹)\Rightarrow \text{نقطه قبلی}=(۳۲,۳۳\times ۹)\, or =(۳۲,-۳۱\times ۹)$$

$$\Rightarrow \text{نقطه قبلی} =(۳۲,۹)=((-۴)\times(-۸),۹)$$

$$\Rightarrow \text{نقطه قبلی} =(-۴,۹)=(-۴,(-۳)\times(-۳))$$

$$\Rightarrow \text{نقطه قبلی} =(۳۲,۹)=(-۴,-۳) = (-۴,(۱)\times(-۳)) \text{ یا } ((-۱)\times ۴,-۳) \text{ یا } ((-۲)\times ۲,-۳)$$

$$\Rightarrow \text{نقطه قبلی} =(-۴,۱)$$

$$\text{یا}= (-۱,-۳)$$

$$\text{یا}= (۲,-۳)$$

معلوم است که هیچ یک از نقاط به‌دست آمده به نقطه(۲،۳) نخواهد رسید، بنابراین جواب درست در گزینه‌ها نیامده است.

۱۷- برای هر رأس، خانه‌ای مطابق شکل مقابل متناظر می‌کنیم. عدد بالایی در هر خانه نشان‌گر تعداد مسیرهایی از A تا به رأس متناظر به آن خانه می‌باشد که تعداد علامت‌های - در آن مسیرها، زوج باشد و عدد پایینی نشانگر تعداد مسیرهای از A به آن مقصد می‌باشد که تعداد علامت‌های - در آن مسیرها، فرد است. اگر علامت رأسی + باشد(رئوس متناظر به خانه‌های سفید)، آن‌گاه عدد بالایی خانه متناظرش با مجموع دو عدد بالایی خانه‌های پایین و چپش و عدد پایینی آن با مجموع دو عدد پایینی آن دو خانه برابر است، و اگر علامت رأسی - باشد(رئوس متناظر به خانه‌های تیره)، آن‌گاه عدد بالایی خانه متناظرش با مجموع دو عدد پایینی خانه‌های پایین و چپش و عدد پایینی آن با مجموع دو عدد بالایی آن دو خانه برابر خواهد بود.

۱ ۰	۲ ۳	۸ ۷	۱۷ ۱۸	۳۵ ۳۵
۰ ۱	۲ ۲	۵ ۵	۱۰ ۱۰	۱۸ ۱۷
۱ ۰	۲ ۱	۳ ۳	۵ ۵	۸ ۷
۰ ۱	۱ ۱	۱ ۲	۲ ۳	۳ ۲
۱ ۰	۱ ۰	۱ ۰	۱ ۰	۱ ۰

۱۸- در هر مرحله یک سکه از تعداد سکه‌ها کم می‌شود، بنابراین باری آن که ۵۰ سکه به یک سکه تبدیل شود(۴۹ سکه کم شود) عمل یاد شده باید ۴۹ بار انجام پذیرد.

۱۹- برای تبدیل سکه‌های ۱ تومانی به یک سکه ۴۰ تومانی، در هر یک از بازه‌های $[۳,۴],[۵,۹],[۱۰,۱۹],[۲۰,۳۹]$ حداقل یک نوع سکه تولید می‌شود. تولید سکه ۲ تومانی در اولین مرحله نیز اجتناب‌ناپذیر است، بنابراین تولید حداقل ۷ نوع سکه (با احتساب سکه‌های ۱ و ۴۰ تومانی) مشخص است. با ۷ نوع سکه به یکی از طرق زیر می‌توان به جواب رسید:

$$\left.\begin{array}{r} ۱\to ۲\to ۴\to ۸\to ۱۶\to ۳۲ \\ ۱\to ۲\to ۴\to ۸ \end{array}\right\}\to ۴۰$$

$$\left.\begin{array}{r} ۱\to ۲\to ۴\to ۸\to ۱۶ \\ ۱\to ۲\to ۴ \end{array}\right\}\to ۲۰\to ۴۰$$

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} ۱\to ۲\to ۴\to ۸\to ۱۶ \\ ۱\to ۲\to ۴\to ۸ \end{array}\right\}\to ۲۴ \\ ۱\to ۲\to ۴\to ۸\to ۱۶ \end{array}\right\}\to ۴۰$$

۲۰- باتوجه به این که $۲^۱+۲^۲+\ldots+۲^{i-۱}=۲^i-۲$ ، بنابراین وزن سنگین‌ترین وزنه از مجموع اوزان بقیه وزنه‌هایش بیش‌تر است، بنابراین سنگین‌ترین وزنه در هر مرحله در کفه‌ای قــرار دارد کـه سنگین‌تر است. بنابرایـن در مرحلـه اول ۶۹۱ وزنـه را در یـک کـفـه و ۶۹۱ وزنه دیگر را رد کفه دیگر قرار می‌دهیم بر روی وزنه‌های کفه‌ای که سنگین‌تر باشد را یک علامت می‌زنیم، وزنه مورد نظر در وزنه‌های علامت‌دار قرار دارد. ۳۴۵ وزنه علامت‌دار را در همان کفه نگه داشته و مابقی(۳۴۶ تا) را در کفه دیگر و در کنار ۶۹۱ وزنه قبلی قرار می‌دهیم. کفه‌ای که سنگین‌تر باشد وزنه مورد نظر را شامل است. بر روی وزنه‌های آن کفه علامت جدیدی می‌گذاریم. یقیناً وزنه مورد نظر در بین وزنه‌هایی که شامل دو علامت هستند قرار دارد که تعداد این وزنه‌ها حداکثر برابر۳۴۶ می‌باشد. اگر این روند را تا انتها ادامه دهیم به این ترتیب که در هر مرحله در یک کفه فقط نصف وزنه‌ها با ماکزیمم علامت را قرار داده و مابقی وزنه‌ها را در کفه دیگر قرار دهیم بعد از ۱۱ مرحله وزنه مورد نظر به‌دست می‌آید با این توضیح که در هر مرحله حداکثر تعداد وزنه‌های با ماکزیمم علامت به شکل زیر می‌باشد.

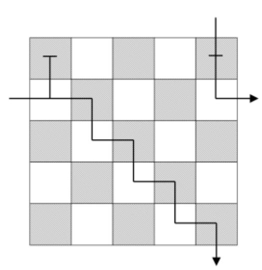
$$۶۹۱\to ۳۴۶\to ۱۷۳\to ۸۷\to ۴۴\to ۲۲\to ۱۱\to ۶\to ۳\to ۲\to ۱$$

۲۱- در هیچ حالتی معلوم نمی‌شود سبک‌ترین وزنه در کدام کفه قرار دارد مگر در حالتی که در یک کفه فقط سنگین ترین وزنه و در کفه دیگر سایر وزنه‌ها موجود باشد، بنابراین به غیر از دسته اخیر که شامل ۱۳۸۱ وزنه است هرگز دسته دیگری نمی‌توان یافت به‌طـوری که مطمئن شد وزنه سبک‌تر(و یا هر وزنه دیگر به غیر از سنگین‌ترین وزنه) در آن دسته قرار داشته باشد.

۲۲- در ثانیه i ام $(i\geq ۲)$ به تعداد $۲^{i-۱}$ نقطه سیاه بر روی خط $y=x$ و به تعداد ۲^i نقطه سیاه بر روی خط $y=x-۲^i$ اضافه می‌شود ، بنابراین رابطه $U_n=U_{n-۱}+۲^n+۲^{n-۱}$ بین تعداد نقاط سیاه در دو مرحله n و $n-۱$ برقرار است. معلوم است که $U_۱=۵$ بنابراین:

$$U_۲=۵+۴+۲=۱۱ \qquad U_۳=۱۱+۸+۴=۲۳$$
$$U_۴=۲۳+۱۶+۸=۴۷ \qquad U_۵=۴۷+۳۲+۱۶=۹۵$$
$$U_۶=۹۵+۶۴+۳۲=۱۹۱$$

۲۳- مطابق شکل مقابل حرکات از مراحل ۲ تا ۱۱ همانند حرکات از مراحل ۱۲ تا ۲۱ و یا ۲۲ تا ۳۱ و یا ... می‌باشد، بنابراین حرکت دوره تناوبی به طور ۱۰ دارد به این معنا که در حرکت ۱۳۸۲ همانند حرکات دوازدهم و دوم در خانه (۲,۲) قرار خواهیم داشت.



-۲۴ معلوم است که هر یک از خانه‌های $(۱,۵),(۲,۴),(۳,۳),(۴,۲),(۵,۱)$ و $(۱,۵)$ فقط متعلق به یک مستطیل می‌باشند. با انتخاب آن پنج مستطیل، تعداد بارهایی که هر خانه از جدول شمارش می‌شوند مطابق شکل مقابل می‌باشد: حال اگر خانه‌های $(۴,۱),(۳,۲),(۴,۳)$و $(۱,۴)$ را انتخاب کرده و مجموع ۴ عدد به‌دست آمده را از مجموع ۵ عدد قبلی کم کنیم، آنگاه هر یک از خانه‌ها دقیقاً یک‌بار در حاصل جمع به کار می‌رود.

۵	۴	۳	۲	۱
۴	۳	۲	۱	
۳	۲	۱		
۲	۱			
۱				

-۲۵ می‌دانیم باقی‌مانده مجموع دو عدد در تقسیم بر ۱۳(یا هر عدد دیگری) با باقی‌مانده مجموع باقی‌مانده‌های آن دو عدد در تقسیم بر ۱۳ برابر است. بنابراین باقی‌مانده F_i به ازای i از ۱ تا ۱۰۰ در تقسیم بر ۱۳ مطابق جدول زیر خواهد بود که دوره تناوبی برابر ۲۸ دارد. همان‌طور که مشاهده می‌شود تعداد مضارب ۱۳ در بین آن اعداد برابر $۱+\left[\frac{۱۰۰}{۷}\right]$ یا ۱۵ می‌باشد.

۰	۱	۱	۲	۳	۵	۸	۰
	۸	۸	۳	۱۱	۱	۱۲	۰
	۱۲	۱۲	۱۱	۱۰	۸	۵	۰
	۵	۵	۱۰	۲	۱۲	۱	۰
	۱	۱	۲	۳	۵	۸	۰
	۸	۸	۳	۱۱	۱	۱۲	۰
	۱۲	۱۲	۱۱	۱۰	۸	۵	۰
	۵	۵	۱۰	۲	۱۲	۱	۰
	۱	۱	۲	۳	۵	۸	۰
	۸	۸	۳	۱۱	۱	۱۲	۰
	۱۲	۱۲	۱۱	۱۰	۸	۵	۰
	۵	۵	۱۰	۲	۱۲	۱	۰
	۱	۱	۲	۳	۵	۸	۰
	۸	۸	۳	۱۱	۱	۱۲	۰
	۱۲	۱۲					

-۲۶ فرض می‌کنیم x توانی از ۲ به صورت $x = 2^t$ باشد در این صورت اعداد از ۱ تا ۱۰۲۳ را به $\frac{۱۰۲۴}{x}$ دسته x عضوی تقسیم می‌کنیم(دسته اول $(x-۱)$ عضوی است). در هر دسته به تعداد $۱+۲+۳+\ldots+(x-۱)$ یعنی $\frac{x(x-۱)}{۲}$سکه «۱» تورویی وجود دارد که تعداد کل آن‌ها $\frac{x(x-۱)}{۲}\times\frac{۱۰۲۴}{۲}$ می‌شود. هر یک از اعضای دسته دوم شامل ۱ سکه x تورویی، هر یک از اعضا دسته سوم شامل ۲ سکه x تورویی،...و بالاخره هر یک از اعضای دسته $\frac{۱۰۲۴}{x}$ شامل $(\frac{۱۰۲۴}{x}-۱)$ سکه x تورویی می‌باشند که تعداد کل آن‌ها $x(۱+۲+۳+\ldots+(\frac{۱۰۲۴}{x}-۱))$ یا $۵۱۲(\frac{۱۰۲۴}{x}-۱)$ می‌باشد که با احتساب $\frac{۱۰۲۴}{x}$ سکه x تورویی مربوط به خود ۱۰۲۴ ریال، تعداد کل سکه‌ها به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$m=\frac{۱۰۲۴}{x}\times\frac{x(x-۱)}{۲}+۵۱۲(\frac{۱۰۲۴}{x}-۱)+\frac{۱۰۲۴}{x}=۵۱۲(x-۲+\frac{۱۰۲۴}{x})$ حاصل عبارت قبل به ازای ۲ ، ۳۲ ، ۱۲۸ و ۵۱۲ برای x به ترتیب برابر ۲۶۲۶۵۶، ۳۱۷۷۶، ۶۸۶۱۶ و ۲۶۲۱۴۶ می‌باشد که به ازای ۳۲ برای x مینیمم است.

اگر x برابر ۱۰ باشد، آنگاه تعداد سکه‌های ۱ تورویی برابر $(۴+۳+۲+۱)+(۹+...+۳+۲+۱)\times۱۰۲$ یعنی ۴۶۰۰ می‌شود، تعداد سکه‌های ۱۰ تورویی نیز برابر $۱۰۲\times۵+(۱۰۱+...+۳+۲+۱)\times۱۰$ یعنی ۵۲۰۲۰ می‌باشد که در کل، تعداد همه سکه‌ها برابر ۵۶۶۲۰ می‌شود.

۲۷- ماخ

$$\left.\begin{array}{l}P(۱)+P(۲)+...+P(۹)=۴۵\\ P(۱۰)+P(۱۱)+...+P(۱۹)=۴۶\\ P(۲۰)+P(۲۱)+...+P(۲۹)=۲\times۴۶\\ \vdots\\ P(۹۰)+P(۹۱)+...+P(۹۹)=۹\times۴۶\end{array}\right\}\Rightarrow\sum_{i=۱}^{۹۹}P(i)=۴۶^۲-۱$$

به همین ترتیب حاصل $\sum P(i)$ به ازای از ۱۰۰ تا ۱۹۹، از ۲۰۰ تا ۲۹۹،...، از ۹۰۰ تا ۹۹۹ به‌ترتیب برابر $۴۶^۲,۴۶^۲,۲\times۴۶^۲,...,۹\times۴۶^۲$ می‌باشد که مجموع کل آن‌ها برابر $۴۶^۳-۱$ می‌شود.

۲۸- ماخ اعداد موجود در کارت i ام را a_i می‌نامیم. بعد از دستور اول نابرابری $a_۱<a_۲$ برقرار است. بقیه دستورها را از بالا به پایین دوبه‌دو یک زوج می‌نامیم. زوج k ام به شکل $\left[(k+۱,k+۲),(k,k+۱)\right]$ خواهد بود. بنابراین ۸۰ زوج به‌دست می‌آید که برایند آن عملکرد زوج k ام آن است که اعداد موجود در سه کارت $k,k+۱$ و $k+۲$ به صورت صعودی مرتب می‌شود. معلوم است که اعداد بزرگ به سمت پایین منتقل می‌شوند ولی اعداد موجود در آن کارت‌ها حداکثر دو پله به سمت بالا منتقل شود؛ بنابراین اگر کوچک‌ترین عدد در کارت ۴ و یا پایین‌تر باشد هرگز آن عدد به کارت ۱ منتقل نخواهد شد ولی بزرگ‌ترین عدد به پایین‌ترین کارت و دومین عدد بزرگ به دومین کارت از پایین منتقل خواهند شد.

۲۹- ماخ ترتیب انجام اعمال در نتیجه نهایی بی‌اثر است بنابراین به ترتیب دلخواه عمل یاد شده را انجام دهید تا به جواب مورد نظر برسید به عنوان مثال ترتیبی از اعمال به شکل زیر، نقطه (۱،۱،۲) را به‌دست خواهد داد:

$$(۵,۵,۶)\rightarrow(۲,۶,۷)\rightarrow(۳,۳,۸)\rightarrow(۴,۴,۵)\rightarrow(۵,۵,۲)\rightarrow(۲,۶,۳)\rightarrow(۳,۳,۴)$$
$$\rightarrow(۴,۴,۱)\rightarrow(۱,۵,۲)\rightarrow(۲,۲,۳)\rightarrow(۳,۳,۰)\rightarrow(۰,۴,۱)\rightarrow(۱,۱,۲)$$

۳۰- ماخ اگر ۲۵۶ عدد مورد نظر را با ۱۶ دسته ۱۶تایی از ۰ تا ۱۵، از ۱۶ تا ۳۱، از ۳۲ تا ۴۷،...، از ۲۴۰ تا ۲۵۵ تقسیم کنیم آن‌گاه رقم $a_۴$ در دسته‌های دوم، چهارم،...، شانزدهم برابر ۱۲۸ می‌باشد. در دسته‌های اول، سوم، ...، پانزدهم با تبدیل ۰ به ۱- در رقم $a_۴$ آن اعداد ۱۶ واحد کم‌تر می‌شوند که در این صورت اعداد دسته $(۲k-۱)$ام همان اعداد دسته $(۲k)$ام می‌شود و فقط ۱۶ عدد موجود در دسته اول به اعداد از ۱۶- تا ۱- تبدیل می‌شوند. بنابراین تعداد کل جواب‌ها ۱۶+۱۲۸ یعنی ۱۴۴ می‌شود.

۳۱- خانه‌های جدول را مطابق شکل نام‌گذاری می‌کنیم:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

$$b+e+d=b+e+f=\text{فرد}\Rightarrow d=f$$

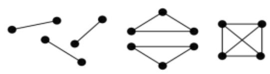
$$b+e+d=d+e+h=\text{فرد}\Rightarrow b=h$$

$$a+d+e+f+c=g+d+e+f+i=\text{فرد}$$

$$\Rightarrow\ (\text{مجموع اعداد همسایه e})=a+b+c+d+f+g+h+i=۲(a+c+b+d)=\text{زوج}$$

پس پر کردن خانه‌های جدول به صورت مطلوب ناممکن است.

۳۲- گراف متناظر به جواب‌های داده شده به شکل مقابل می‌باشد:



همان‌طور که مشاهده می‌شود تعداد افرادی که می‌توانند جواب ۳ بدهند برابر ۴ می‌باشد، بنابراین نفر شانزدهم نیز جزء این دسته می‌باشد.

۳۳- اگر اعمال «تعویض» و «بر کامل» را به ترتیب با f و g نمایش دهیم، آنگاه کوتاه‌ترین راه برای رساندن اعداد از ۱ تا ۷ به‌رو به ترتیب به شکل زیر می‌باشد که در بین آن‌ها عدد ۷ بلندترین طول مسیر را دارد که طول آن برابر ۵ می‌باشد.

$۱ \xrightarrow{f} ۰$

$۲ \xrightarrow{g} ۴ \xrightarrow{g} ۱ \xrightarrow{f} ۰$

$۳ \xrightarrow{f} ۲ \xrightarrow{g} ۴ \xrightarrow{g} ۱ \xrightarrow{f} ۰$

$۴ \xrightarrow{g} ۱ \xrightarrow{f} ۰$

$۵ \xrightarrow{f} ۴ \xrightarrow{g} ۱ \xrightarrow{f} ۰$

$۶ \xrightarrow{g} ۵ \xrightarrow{f} ۴ \xrightarrow{g} ۱ \xrightarrow{f} ۰$

$۷ \xrightarrow{f} ۶ \xrightarrow{g} ۵ \xrightarrow{f} ۴ \xrightarrow{g} ۱ \xrightarrow{f} ۰$

۳۴- رقم a_0 در اعداد ۴،۲،۰ و۶ برابر ۰ می‌باشد. اگر آن رقم خراب باشد و به جای ۰ رقم a را اختیار کند، آنگاه آن اعداد به ترتیب به صورت $۴+a,۲+a,۰+a$ و $۶+a$ در می‌آیند که با قرار دادن اعداد ۶،۶،۲ و ۱۰ به جای آن‌ها برای a مقدار ثابتی به‌دست نمی‌آید.

رقم a_1 در اعداد۴،۱،۰ و۵ برابر ۰ می‌باشد. اگر آن رقم خراب بوده و به جای ۰ رقم a را اختیار کند، آنگاه آن اعداد به ترتیب به صورت $۴+a,۱+a,۰+a$ و $۵+a$ در می‌آیند که با قرار دادن اعداد ۶،۳،۲ و ۷ به جای آن‌ها برای a مقدار ۲ به‌دست می‌آید. به این معنا که رقم a_1 به جای ۰ مقدار ۲ را اختیار می‌کند. به همین ترتیب معلوم می‌شود که آن رقم به جای ۱ عدد ۳ را به خودش اختیار کرده است.

۳۵- کلمه «هوپ» موقعی گفته می‌شود که دو بار متوالی به باقی‌مانده ۱ برسیم. از طرف دیگر باقی‌مانده‌های به‌دست آمده نشانگر ارقام آن عدد در مبنای ۲ می‌باشد، بنابراین تعداد «هوپ»های گفته شده برای هر عدد بیانگر تعداد «۱۱»های موجود در معادل آن عدد در مبنای ۲ می‌باشد. تبدیل یافته هر یک از اعداد ۱۳۸۲ و ۲۰۰۴ در مبنای ۲ به ترتیب به شکل(۱۰۱۰۱۱۰۰۱۱۰) و (۱۱۱۱۱۰۱۰۱۰۰) می‌باشد که در مورد اولی ۲ سری «۱۱» و در مورد دومی ۴ سری «۱۱» وجود دارد.

۳۶- فرض می‌کنیم c شامل α عدد ۱، β عدد ۲ و γ عدد ۳ باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$\alpha + 5\beta + 2\gamma = 3\alpha + 2\beta + \gamma \Rightarrow \gamma = 2\alpha - 3\beta$$

اگر $\beta=0$، آن‌گاه $\alpha=1$ و $\gamma=2$ که این دنباله کوتاه‌ترین طول را دارد اما در این حالت $a \neq b$.

اگر $\beta=1$، آن‌گاه $\alpha=2$ و $\gamma=1$ کوتاه‌ترین طول را تولید می‌کند. در این حالت اگر دنباله c را به صورت c= ۲،۱،۱،۳ تعریف کنیم تساوی به‌دست خواهد آمد.

۳۷- علامت + را «۰» و علامت - را «۱» در نظر گرفته و خانه‌های جدول را مطابق شکل نام‌گذاری می‌کنیم، خواهیم داشت:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

$$a+b+c+f = c+b+a+d \Rightarrow f = d$$
$$b+a+d+g = a+d+g+h \Rightarrow b = h$$
$$a+d+g+h = d+g+h+i \Rightarrow a = i$$

$$c+b+a+d = b+a+d+g \Rightarrow c = g$$
$$d+e+f+i = \text{زوج} \Rightarrow 2d+e+i = \text{زوج} \Rightarrow e = i$$

به همین ترتیب e با حروف c، a و g نیز برابر می‌شود، بنابراین حروف b، d، f و h نیز برابر می‌شوند. بنابراین اگر خانه‌های جدول را به صورت شطرنجی رنگ‌آمیزی کنیم، خانه‌های سیاه به یکی از دو طریق(یا همگی «۰» و یا همگی «۱») و نیز خانه‌های سفید نیز مستقل از وضعیت خانه‌های سیاه، به دو طریق (یا همگی «۰» و یا همگی «۱») قابل پر شدن می‌باشند که طبق اصل ضرب جواب مورد نظر ۲×۲ یعنی ۴ می‌باشد.

۳۸- فرض کنید بعد از مراحلی در مورد رنگ خاصی که در بشقاب a و b مربوط به آن رنگ است، بشقاب a پایین‌تر از بشقاب b باشد، به‌طور مستقل از سایر عملکردها دو کار می‌توان انجام داد، یکی آن که بشقاب b را به سینی دوم برد و یا تکلیف تمام بشقاب‌های بین a و b را مشخص کرد و سپس بشقاب a را (که احتمالا در زیر چند بشقاب جا مانده است) به سینی دوم منتقل کنیم. بنابراین طبق اصل ضرب جواب مورد نظر 2^5 یعنی ۳۲ خواهد شد.

۳۹- معلوم است که عدد موجود در خانه وسط, چهار بار به عنوان رقم وسط یک عدد سه رقمی ظاهر می‌شود ولی در بین اعداد داده شده هیچ چهار عددی وجود ندارد که رقم وسط مشابهی داشته باشند، ولی سه عدد ۱۲۳,۱۲۱ و ۳۲۲ چنانند که رقم وسطشان ۲ است، بنابراین عدد مجهول نیز رقم وسطش ۲ است که در بین گزینه‌ها فقط ۱ و ۲ چنینند. عدد a به عنوان رقم اول در ۳ تا از اعداد ظاهر می‌شود که در بین ۸ عدد فقط رقم ۱ در بیش از دو عدد به‌عنوان رقم اول ظاهر شده است، بنابراین a=۱. قطر اصلی به صورت ۱۲i می‌باشد که اگر i را برابر ۱ قرار دهیم آن‌گاه ستون سوم به صورت cf۱ در می‌آید که در بین ۸ عدد چنین چیزی وجود ندارد, بنابراین i=۳ و حرف g به عنوان رقم صدگان دو عدد به کار می‌رود که یکی از آن دو رقم یکانش ۳ است و دیگری رقم دهگانش ۲ است، در بین ۸ عدد فقط دو عدد ۳۱۳ و ۳۲۲ چنینند. لذا g=۳،h=۱ و c= ۲. بعد از این جدول به صورت منحصربه‌فرد به شکل مقابل پر می‌شود که در آن عدد مجهول عدد موجود در سطر دوم به شکل ۵۲۴ یافت می‌شود.

a	b	c
d	۲	f
g	h	i

۱	۱	۲
۵	۲	۴
۳	۱	۳

۴۰- دو رقم hh به ۱۶ طریق متمایز می‌تواند باشد (از ۰۰ تا ۰۵، از ۱۰ تا ۱۵ و از ۲۰ تا ۲۳)، دو رقم mm به یکی از ۶ طریق ۴۴،۳۳،۲۲،۱۱،۰۰ و یا ۵۵ می‌تواند باشد. دو رقم ss نیز متناسب با وضعیت hh به صورت منحصربه‌فرد یافت می‌شود. بنابراین جواب مورد نظر ۶×۱۶ یعنی ۹۶ به‌دست می‌آید.